

Aufgabe:

Die absolute Fläche zwischen Graph und X-Achse auf dem Intervall $[-2; 4]$ soll berechnet werden. Dabei ist folgende Funktion gegeben:

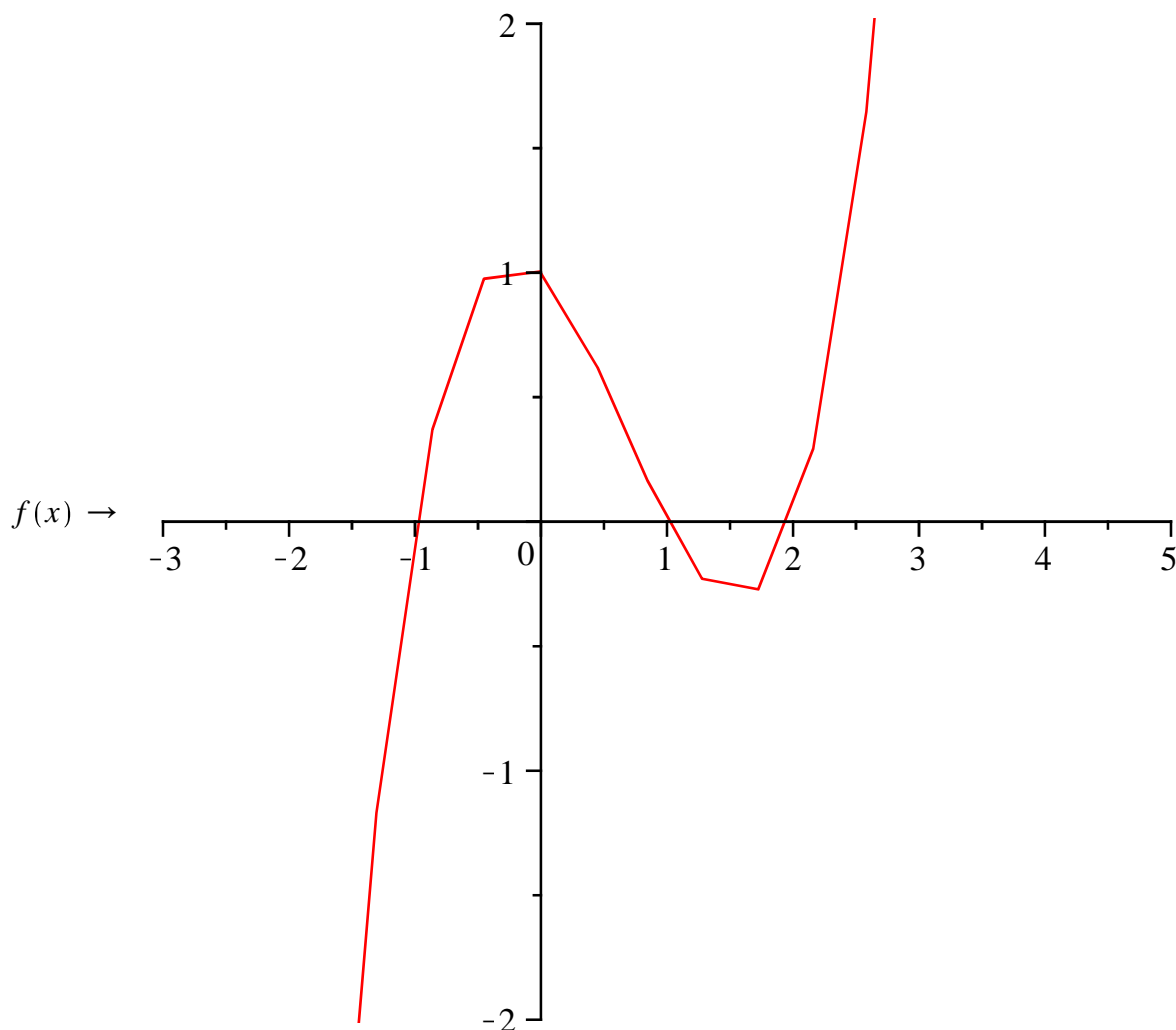
$$f: x \rightarrow \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

$$x \rightarrow \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \quad (1)$$

Bei der folgenden Lösung werden sämtliche Rechenregeln, die vor der Stufe 12 durchgenommen wurden vorausgesetzt. Dazu gehört auch die Polynomdivision. Außerdem wird der Hauptsatz gebraucht, der die Fläche unter der Randfunktion zwischen a und b durch die Differenz von zwei Werten der Stammfunktion ausdrückt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Die Funktion f sieht wie folgt aus:



Der Lösungsansatz ist nun, nicht einfach das Integral über -2 bis 4 von $f(x)$ zu bilden, sondern Abschnitt für Abschnitt vorzugehen. Dabei werden die Abschnitte durch die Nullstellen vorgegeben. Da es sich

allerdings um ein Polynom 3. Ordnung handelt, müssen wir eine Nullstelle erraten. Auf dem Graphen bietet sich die 1 an, welche durch Einsetzen bestätigt werden kann:

$$f(1) = 0 \quad (2)$$

Nun dividieren wir die Nullstelle durch Polynomdivision aus der Funktion heraus. Das resultierende Polynom 2. Ordnung wird dann gleich 0 gesetzt und die beiden weiteren Nullstellen herauszufinden. In diesem konkreten Beispiel könnten wir auch einfach -1 und 2 testen, da sie auf dem Graph einfach abzulesen sind. Zuerst berechne ich das Polynom und anschließend setze ich es gleich 0:

$$\frac{f(x)}{(x-1)} = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - 1$$

$$\frac{f(x)}{(x-1)} = 0 \rightarrow \{x = -1\}, \{x = 2\}$$

Somit haben wir jetzt alle drei Nullstellen, -1, 1 und 2. Jetzt sind wir in der Lage die einzelnen Teile zu integrieren und zu addieren. Dabei muss beachtet werden, dass die Teileflächen unterhalb der X-Achse negiert werden müssen, damit sie positiv in die Summe mit eingehen. Allgemein kann der Betrag des Flächeninhalts genommen werden. Es werden nun also die einzelnen Flächeninhalte berechnet. Voraussetzung dafür ist natürlich die Stammfunktion. Danach ist die Berechnung mit Hilfe des Hauptsatzes einfach.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + x \quad (3)$$

$$A_0 := \int_{-2}^{-1} f(x) dx = -\frac{59}{24} \quad (4)$$

$$A_1 := \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{4}{3} \quad (5)$$

$$A_2 := \int_1^2 f(x) dx = -\frac{5}{24} \quad (6)$$

$$A_3 := \int_2^4 f(x) dx$$

$$\frac{31}{3} \quad (7)$$

Addieren wir jetzt die Beträge der einzelnen Werte, erhalten wir die gesamte Fläche:

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$\frac{43}{3} \quad (8)$$

$$\rightarrow 14.333$$

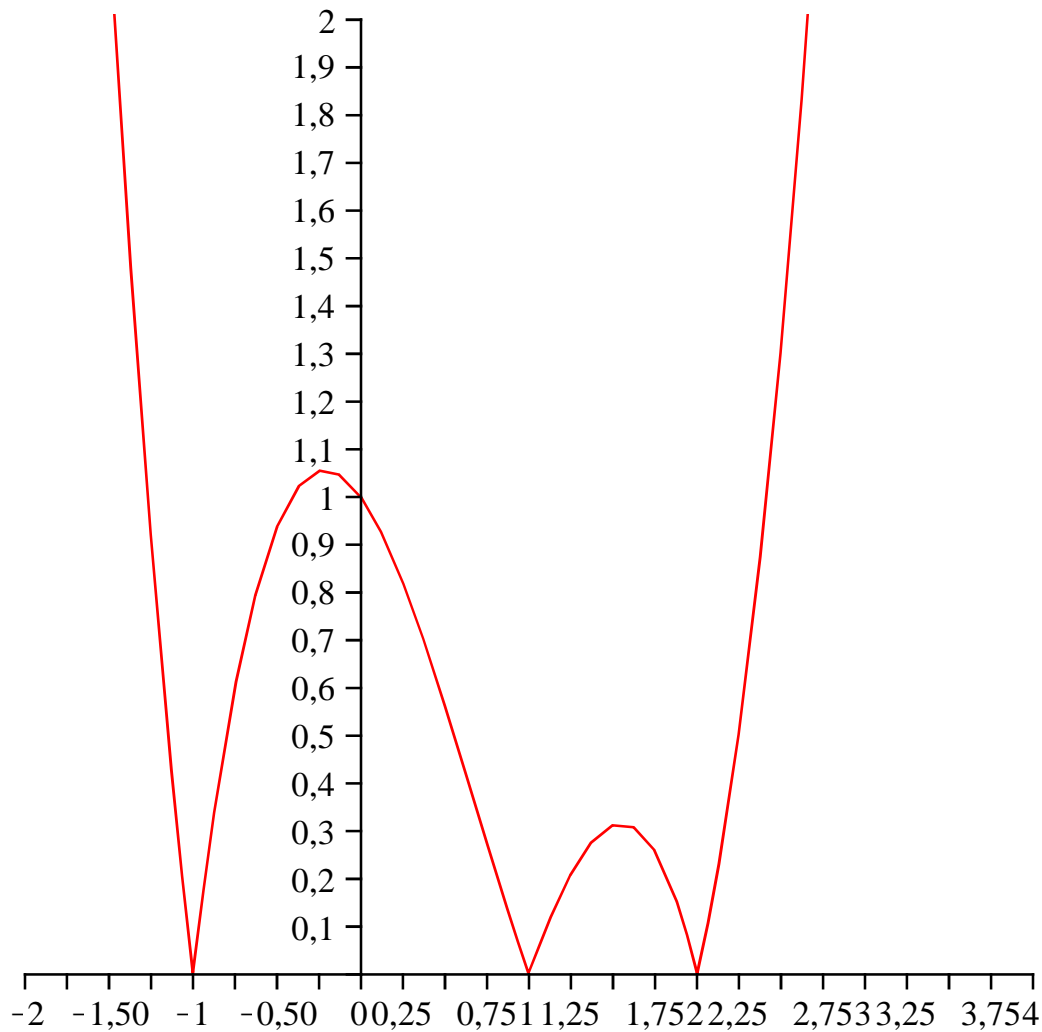
Damit haben wir unser Ergebnis.

Jetzt die andere Variante. Die Idee ist, dass man alle Flächen, die Unterhalb der X-Achse liegen nach "oben geklappt" werden um dann positiv in das "normale" Integral einzugehen. Somit erspart man sich auf den ersten Blick das Aufteilen in mehrere Funktionen. Die Funktion wird also in Betragsstriche geschrieben und sieht dann so aus:

$$g := x \rightarrow |f(x)|$$

$$x \rightarrow |f(x)| \quad (9)$$

$$g(x)$$



Die Nullstellen sind natürlich die Gleichen geblieben. Allerdings steht man bei der Integration jetzt vor dem Problem, dass die Funktion mehrere Knicke hat. Dadurch ist sie nicht mehr direkt integrierbar, sie muss dazu in Abschnitte geteilt werden. Wenn wir die Funktion also integrieren, bekommen wir folgendes:

$$\int g(x) \, dx \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x & x \leq -1 \\ \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{19}{12} & -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{8}{3} & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + 2 & x > 2 \end{array} \right. \quad (10)$$

Jetzt muss man beim Ausrechnen des Integrals leider immer noch abschnittsweise vorgehen. Man sieht,

dass die Funktion bis auf Konstanten, die aber beim Hauptsatz wegfallen, und ein weiteres Minus genau gleich sind. Somit sind die Flächeninhalte schon alle positiv, aber sonst ist das Problem genau das gleiche.

Einen Vorteil hat diese Schreibweise jedoch, Software wie diese hier und der Taschenrechner ist in der Lage darauf das Integral direkt zu berechnen. Dieses CAS kann wie oben die Funktion zerlegen und integrieren und kommt auf ein exaktes Ergebnis, der Taschenrechner dagegen nur eine Näherung, da er eine Obersumme bildet. Diese ist dann auf wenige Prozent ungenau.

So sieht das Integral nun komplett und in einem Schritt gelöst aus. Dahinter steckt aber auch nur der Weg, der oben besprochen worden ist.

$$\int_{-2}^4 g(x) \, dx$$

$$\frac{43}{3}$$

(11)

→

$$14.333$$

Und das ist genau das gleiche Ergebnis, da beide letztlich stückweise integriert worden sind. Der Taschenrechner ist allerdings in der Lage durch die Betragsfunktion genau zu wissen, was er tun soll, während die stückweise Integration so nicht in den Taschenrechner eingegeben werden kann. Es ist jetztlich nur das Benutzen der Betragsfunktion um die Aufgabe klar auszudrücken. Das Problem wird dadurch nicht gelöst, aber es lässt sich nun formal aufschreiben und von einem CAS lösen.