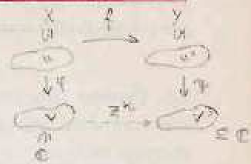
2.1. Satz (Lokale Gestalt holomorpher Abbildungen). *Seien X, Y Riemannsche Flächen, $f: X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung, $a \in X$ und $b := f(a)$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und Karten $\varphi: U \to V$ auf X bzw. $\psi: U' \to V'$ auf Y mit folgenden Eigenschaften:*



i) $a \in U, \varphi(a) = 0; b \in U', \psi(b) = 0.$
ii) $f(U) \subset U'$.
iii) *Für die Abbildung* $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V'$ *gilt*

$$F(z) = z^k \text{ für alle } z \in V.$$

Beweis. Zunächst lassen sich Karten $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ auf X und $\psi : U' \to V'$ auf Y finden, so daß die Eigenschaften i) und ii) mit (U_1, φ_1) anstelle von (U, φ) erfüllt sind. Nach dem Identitätssatz ist die Funktion

$$f_1 := \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V' \subset \mathbb{C}$$

nicht-konstant und es gilt $f_1(0) = 0$, also gibt es ein $k \geq 1$, so daß $f_1(z) = z^k g(z)$, wobei g eine in V_1 holomorphe Funktion mit $g(0) \neq 0$ ist. In einer gewissen Umgebung von 0 gibt es deshalb eine holomorphe Funktion h mit $h^k = g$. Die Zuordnung $z \mapsto zh(z)$ liefert eine biholomorphe Abbildung $\alpha : V_2 \to V$ einer offenen Umgebung $V_2 \subset V_1$ der Null auf eine offene Umgebung V der Null. Sei $U := \varphi_1^{-1}(V_2)$. Wir ersetzen nun die Karte $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ durch die Karte $\varphi : U \to V$ mit $\varphi = \alpha \circ \varphi_1$. Für die Abbildung $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ gilt dann nach Konstruktion $F(z) = z^k$, q.e.d.

2.2. Bemerkung. Die Zahl k in Satz (2.1) kann folgendermaßen charakterisiert werden: Zu jeder Umgebung U_0 von a gibt es Umgebungen $U \subset U_0$ von a und W von $b = f(a)$, so daß für jeden Punkt $y \in W$ mit $y \neq b$ die Menge $f^{-1}(y) \cap U$ genau k Elemente hat. Man nennt k die *Vielfachheit*, mit der die Abbildung f den Wert b im Punkt a annimmt.

2.3. Beispiel. Sei $f(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k$ ein Polynom k-ten Grades. Dann kann f als holomorphe Abbildung $f: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ mit $f(\infty) = \infty$ aufgefaßt werden (vgl. § 1). Durch Benutzung von Karten um ∞ rechnet man leicht nach, daß ∞ mit der Vielfachheit k angenommen wird.

2.4. Corollar. *Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f: X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann ist f offen, d.h. das Bild jeder offenen Menge ist offen.*

Beweis. Aus Satz (2.1) folgt unmittelbar: Ist U Umgebung eines Punktes $a \in X$, so ist $f(U)$ Umgebung des Punktes $f(a)$. Daraus ergibt sich die Offenheit.

ergibt sich auch direkt über Karten [sind offen] !