Метод расчета рычажных механизмов

Учебный курс: Теория механизмов и машин
Тип задачи: курсовые работы

Иванов Алексей Борисович,Freelancer,Селицкий Фридель Иосифович,Freelancer

Предложен численно-аналитический метод расчета плоских и пространственных рычажных механизмов,который не требует трудоемких преобразований для составления и расчета нелинейных уравнений.Составлена программа(код в среде программирования SMath Studio),позволяющая по заданным начальным положениям и уравнениям геометрических связей находить все положения механизма, что облегчает создание его анимации

Существующие разновидности аналитического расчета рычажных механизмов можно свести к двум базовым методам: метод замкнутого векторного контура и метод преобразования координат. Сущность первого метода заключается в том, что механизм представляется в виде одного или нескольких замкнутых векторных многоугольников,суммы проекций сторон которых на оси координат равны нулю.
При использовании метода преобразования координат задача о положении звеньев решается путем перехода из системы, в которой это положение известно в систему, в которой его требуется определить. Переход от системы к системе осуществляется перемножением матриц перехода.Оба метода приводят к замкнутой системе нелинейных уравнений,выраженных через угловые координаты звеньев,которая решается аналитически или численно.
Недостатком существующих методов можно считать трудоемкость как составления,так и решения системы нелинейных уравнений ,которая увеличивается с увеличением числа звеньев,особенно в пространственных механизмах.
А.Б.Иванов предложил новый метод расчета[1] ,который лишен этого недостатка.Метод основан на идее метода А.В. Драгилева решения системы нелинейных уравнений.Согласно новому методу задаются начальные координаты всех точек(шарниров) механизма и уравнения геометрических связей,причем число уравнений на единицу меньше числа переменных.Решение проводится в два этапа.На первом,аналитическом-система из N нелинейных уравнений с N+1 переменными приводится методом А.В. Драгилева к системе N+1 дифференциальных уравнений с заданными начальными положениями(задаче Коши).На втором этапе задача Коши решается численно.
Применение метода покажем на примере.

1.Пример1.Найти положения шарнирного четырехзвенника.Заданы координаты осей О(0,0),О1(2,0), размеры звеньев,координаты точек(шарниров) в начальном положении и уравнения геометрических связей:

Размеры звеньев

$L := 2.5$ $\quad r := 1$ $\quad Lk := 2$

координаты точек(шарниров) в начальном положении

$X0_1 := 0.5$ $\quad X0_2 := 2$ $\quad X0_3 := -1$ $\quad X0_4 := 0$

Уравнения геометрических связей

$$\left(x_1 - 2\right)^2 + \left(x_2\right)^2 - Lk^2 = 0$$ Расстояния между двумя точками коромысла

$$\left(x_3\right)^2 + \left(x_4\right)^2 - r^2 = 0$$ Расстояния между двумя точками кривошипа

$$\left(x_4 - x_2\right)^2 + \left(x_3 - x_1\right)^2 - L^2 = 0$$ Расстояния между двумя точками шатуна

Решение

Систему из 3 алгебраических уравнений геометрических связей с четырьмя неизвестными x1,...,x4 сведем к системе четырех дифференциальных уравнений с заданными начальными положениями.

Обозначим левую часть уравнений через f1,f2,f3

$$\begin{cases} f_1 := (x_1 - 2)^2 + (x_2)^2 - Lk^2 \\ f_2 := (x_3)^2 + (x_4)^2 - r^2 \\ f_3 := (x_4 - x_2)^2 + (x_3 - x_1)^2 - L^2 \end{cases}$$

Все положения механизма (координаты всех точек) с одной степенью свободы можно непрерывно соотнести с длиной дуги, которая является решением этой системы нелинейных уравнений. И если некая величина t имеет взаимно однозначное соответствие с длиной дуги, то все переменные системы будут функциями от t. Предполагая, что существует такая t, продифференцируем f1,f2,f3 по параметру t

$$\frac{d}{dx_1} f_k \cdot \frac{d}{dt} x_1 + \frac{d}{dx_2} f_k \cdot \frac{d}{dt} x_2 + \frac{d}{dx_3} f_k \cdot \frac{d}{dt} x_3 + \frac{d}{dx_4} f_k \cdot \frac{d}{dt} x_4 = 0 \qquad (k=1,2,3)$$

В результате получаем систему трех линейных однородных алгебраических уравнений относительно переменных dx1/dt,...,dx4/dt

$$\begin{cases} 2\cdot\left[(-2 + x_1)\cdot\frac{d}{dt}x_1 + x_2\cdot\frac{d}{dt}x_2\right] = 0 \\ 2\cdot\left(x_3\cdot\frac{d}{dt}x_3 + x_4\cdot\frac{d}{dt}x_4\right) = 0 \\ -2\cdot\left[(x_3 - x_1)\cdot\left(\frac{d}{dt}x_1 - \frac{d}{dt}x_3\right) + (x_4 - x_2)\cdot\left(\frac{d}{dt}x_2 - \frac{d}{dt}x_4\right)\right] = 0 \end{cases}$$

Примем,что первые три переменные являются базовыми ,а dx4/dt является свободной переменной.

Теперь,если перенесем вправо члены,содержащие свободную переменную,то получим систему трех неоднородных линейных алгебраических уравнений с тремя базовыми переменными

$$\begin{cases} 2\cdot\left[(-2 + x_1)\cdot\frac{d}{dt}x_1 + x_2\cdot\frac{d}{dt}x_2\right] = 0 \\ 2\cdot x_3\cdot\frac{d}{dt}x_3 = -2\cdot x_4\cdot\frac{d}{dt}x_4 \\ -2\cdot(x_3 - x_1)\cdot\frac{d}{dt}x_1 - 2\cdot(x_4 - x_2)\cdot\frac{d}{dt}x_2 + 2\cdot(x_3 - x_1)\cdot\frac{d}{dt}x_3 = (-2)\cdot(x_4 - x_2)\cdot\frac{d}{dt}x_4 \end{cases} \qquad (1)$$

Эту систему можно представить в матричной форме Ax = b, где A - основная матрица, b- матрица свободных членов:

$$A := \begin{pmatrix} 2\cdot(-2 + x_1) & 2\cdot x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot x_3 \\ -2\cdot(x_3 - x_1) & -2\cdot(x_4 - x_2) & 2\cdot(x_3 - x_1) \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ -2\cdot x_4 \\ -2\cdot(x_4 - x_2) \end{pmatrix}\cdot\frac{d}{dt}x_4$$

Систему(1) будем решать методом Крамера.Для этого найдем определители основной матрицы и трех дополнительных.Дополнительная матрица получается из основной путем замены элементов одного из трех столбцов основной матрицы элементами матрицы свободных членов

$$\Delta 1_1 := \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2\cdot x_2 & 0 \\ -2\cdot x_4 & 0 & 2\cdot x_3 \\ -2\cdot(x_4 - x_2) & -2\cdot(x_4 - x_2) & 2\cdot(x_3 - x_1) \end{pmatrix} \right\| \cdot \frac{d}{dt} x_4$$

$$\Delta 1_2 := \left\| \begin{pmatrix} 2\cdot(-2 + x_1) & 0 & 0 \\ 0 & -2\cdot x_4 & 2\cdot x_3 \\ -2\cdot(x_3 - x_1) & -2\cdot(x_4 - x_2) & 2\cdot(x_3 - x_1) \end{pmatrix} \right\| \cdot \frac{d}{dt} x_4 \qquad (2)$$

$$\Delta 1_3 := \left\| \begin{pmatrix} 2\cdot(-2 + x_1) & 2\cdot x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\cdot x_4 \\ -2\cdot(x_3 - x_1) & -2\cdot(x_4 - x_2) & -2\cdot(x_4 - x_2) \end{pmatrix} \right\| \cdot \frac{d}{dt} x_4$$

Теперь можем написать решение системы (1)

$$\frac{d}{dt} x_k = \Delta_k \cdot \frac{\frac{d}{dt} x_4}{|A|} \qquad (k=1,2,3) \qquad (3)$$

где Δ_k -определители в правой части выражений (2)

Свободная переменная может принимать любые значения.Чтобы избавиться от второго сомножителя в последнем выражении,зададим её равной

$$\frac{d}{dt} x_4 = -|A| \qquad (4)$$

Из (3) и (4),раскрывая определители, получаем систему четырех ОДУ

$$\frac{d}{dt} x_1 = -8\cdot x_2 \cdot \left(-(x_4 - x_2)\cdot x_3 + x_4\cdot(x_3 - x_1)\right)$$

$$\frac{d}{dt} x_2 = -8\cdot(-2 + x_1)\cdot\left(-x_4\cdot(x_3 - x_1) + (x_4 - x_2)\cdot x_3\right)$$

$$\frac{d}{dt} x_3 = -8\cdot\left(-(-2 + x_1)\cdot(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1)\cdot x_2\right)\cdot x_4$$

$$\frac{d}{dt} x_4 = 8\cdot\left(-(-2 + x_1)\cdot(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1)\cdot x_2\right)\cdot x_3$$

Представим правую часть системы ОДУ в виде матрицы,зададим интервал и шаг интегрирования.Для численного интегрирования используем функцию rkfixed

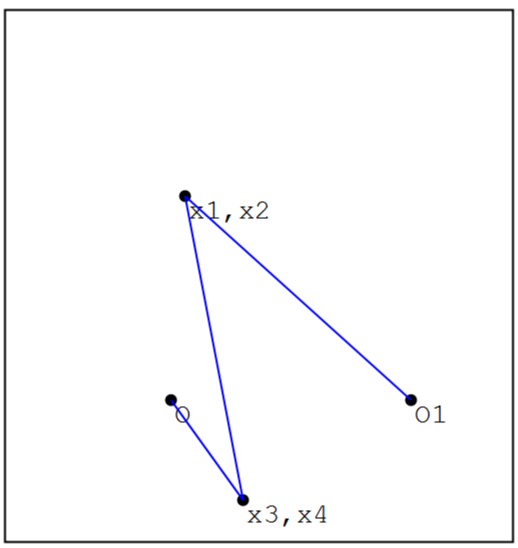
$$D(t,x) := \begin{pmatrix} -8\cdot x_2\cdot\left(-\left(x_4-x_2\right)\cdot x_3+x_4\cdot\left(x_3-x_1\right)\right) \\ -8\cdot\left(-2+x_1\right)\cdot\left(-x_4\cdot\left(x_3-x_1\right)+\left(x_4-x_2\right)\cdot x_3\right) \\ -8\cdot\left(-\left(-2+x_1\right)\cdot\left(x_4-x_2\right)+\left(x_3-x_1\right)\cdot x_2\right)\cdot x_4 \\ 8\cdot\left(-\left(-2+x_1\right)\cdot\left(x_4-x_2\right)+\left(x_3-x_1\right)\cdot x_2\right)\cdot x_3 \end{pmatrix}$$

$tmin := 0$ $\quad tmax := 0.186$ $\quad \Delta t := 0.006$ $\quad N := \dfrac{tmax}{\Delta t}$ $\quad N = 31$

$B := rkfixed(X0, tmin, tmax, N, D(t,x))$

$x(k,t) := eval\left(col(B, k+1)_{t+1}\right)$

$\tau := 0 .. N-1$



Ниже приведена программа ,которая считает координаты как плоских,так и пространственных рычажных механизмов по заданным начальным координатам и уравнениям связей

2.Программа расчета методом А.В.Драгилева

```
Dragilev(X0 , tmin , tmax , N):= | "rows(f)= n-1-количество уравнений"
                                 | "n-количество переменных"
                                 | n:= rows(f)+1
                                 | "дополнительное уравнение для получения матрицы n*n"
                                 | f_n := 0
                                 | "Матрица Якоби"
                                 | for j:=1 ,j≤n ,j:=j+1
                                 |   for k:=1 ,k≤n ,k:=k+1
                                 |     m_(j k) := d/(d x_k) f_j
                                 | Jacobi(x):= m
                                 | "матрица свободных членов"
                                 | b:=(-1)·submatrix(Jacobi(x) , 1 , n-1 , n , n)
                                 | "основная(квадратная) матрица"
                                 | A:= submatrix(Jacobi(x) , 1 , n-1 , 1 , n-1)
                                 | "определители дополнительных матриц "
                                 | if n>2
                                 |   Δ_1 :=-|augment(b , submatrix(A , 1 , n-1 , 2 , n-1))|
                                 |   Δ_(n-1) :=-|augment(submatrix(A , 1 , n-1 , 1 , n-2) , b)|
                                 |   "определитель свободной переменной"
                                 |   Δ_n :=-|A|
                                 |   for k:=2 ,k≤n-2 ,k:=k+1
                                 |     Δ_k :=-|augment(submatrix(A , 1 , n-1 , 1 , k-1) , b , submatrix(A ,
                                 | else
                                 |   Δ_1 := b
                                 |   Δ_n := |A|
                                 | dS:= sqrt((Δ_1)^2 + (Δ_2)^2)
                                 | for i:=1 ,i≤n ,i:=i+1
                                 |   D2_i := Δ_i / dS
                                 | "Матрица  правых частей  системы ОДУ"
                                 | D1(t , x):= D2
                                 | "Решение  системы  ОДУ"
                                 | rkfixed(X0 , tmin , tmax , N , D1(t , x))
```

Пример2.Построить положения шестизвенного механизма.Найти скорость и ускорение ползуна D

Размеры звеньев

$OA:=15$	$AB:=97$	$O1B:=60$	$O1C:=0.5\cdot O1B$
$CD:=86$	$a:=50$	$b:=37$	$CB:=O1B-O1C$

координаты точек (шарниров) в начальном положении

$X0_1 := 0$ $X0_2 := 15$ $X0_3 := 95.4731$ $X0_4 := -2.1433$

$X0_5 := 72.7365$ $X0_6 := 17.4283$ $X0_7 := 50$ $X0_8 := 100.3684$

Уравнения геометрических связей

$f_1 := (x_1)^2 + (x_2)^2 - OA^2$ Уравнение расстояния между точками О и В

$f_2 := (x_4 - x_2)^2 + (x_3 - x_1)^2 - AB^2$ Уравнение расстояния между точками А и В

$f_3 := (a - x_3)^2 + (b - x_4)^2 - O1B^2$ Уравнение расстояния между точками О1 и В

$f_4 := (a - x_5)^2 + (b - x_6)^2 - (O1C)^2$ Уравнение расстояния между точками О1 и С

$f_5 := (x_5 - x_3)^2 + (x_6 - x_4)^2 - (CB)^2$ Уравнение расстояния между точками С и В

$f_6 := (x_5 - x_7)^2 + (x_6 - x_8)^2 - CD^2$ Уравнение расстояния между точками С и D

$f_7 := x_7 - a$ х-координата направляющей

$tmin := 0$ $tmax := 95$ $\Delta t := 1$ $N := \dfrac{tmax}{\Delta t}$ $N = 95$

$B := Dragilev(X0, tmin, tmax, N)$

Каждая колонка матрицы В- координаты соотвествующих точек

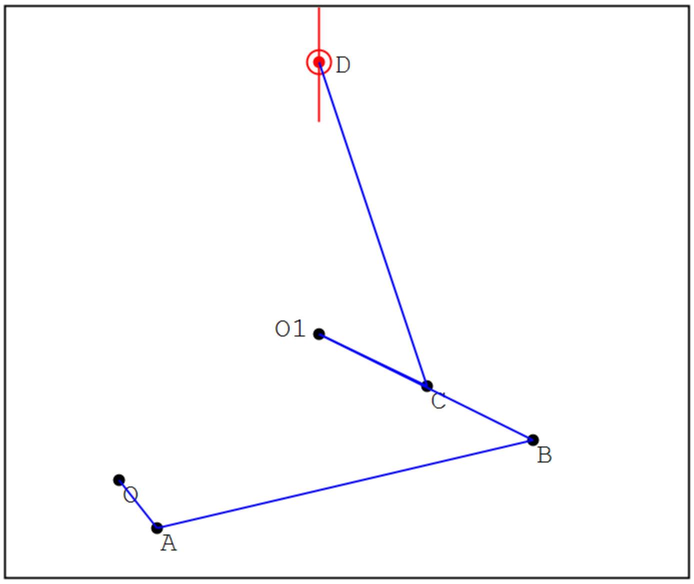
$xA(t) := col(B, 2)_{t+1}$ $xB(t) := col(B, 4)_{t+1}$

$yA(t) := col(B, 3)_{t+1}$ $yB(t) := col(B, 5)_{t+1}$

$xC(t) := col(B, 6)_{t+1}$ $xD(t) := col(B, 8)_{t+1}$

$yC(t) := col(B, 7)_{t+1}$ $yD(t) := col(B, 9)_{t+1}$

$\tau := 0 .. N - 1$



Скорость и ускорение ползуна находим численным дифференцированием

Dif(z, Δθ) := | "Функция численного дифференцирования"

$$n := N + 1$$

$$a_1 := \frac{-z_3 + 4 \cdot z_2 - 3 \cdot z_1}{2 \cdot \Delta\theta}$$

for $j := 3, j \le n, j := j + 1$

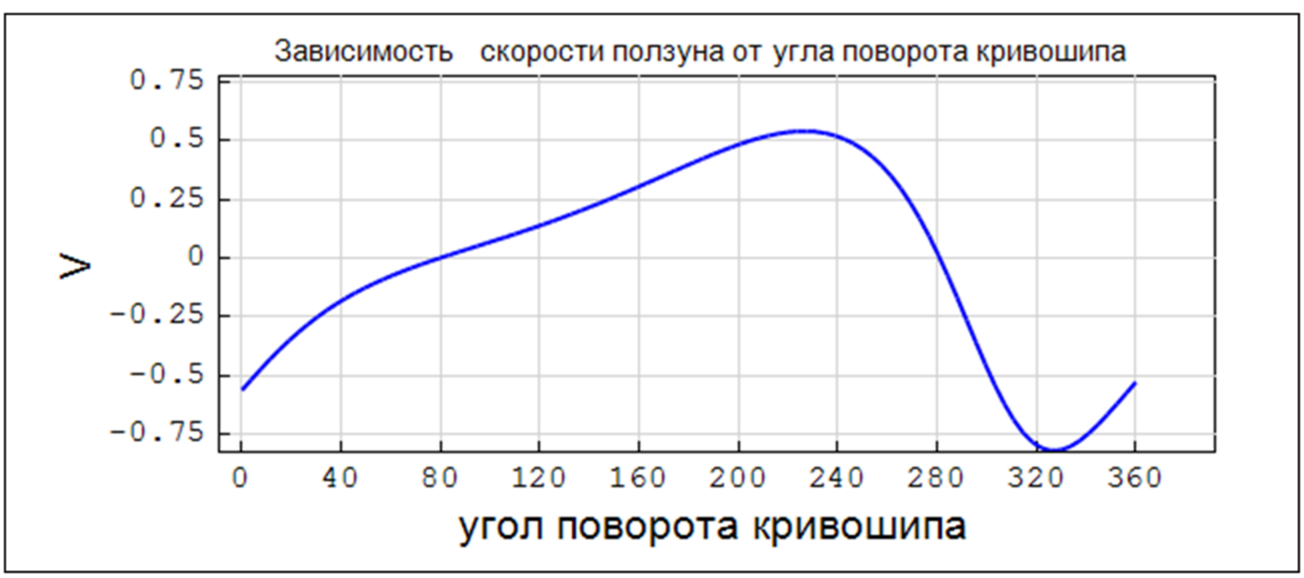
$$a_{j-1} := \frac{z_j - z_{j-2}}{2 \cdot \Delta\theta}$$

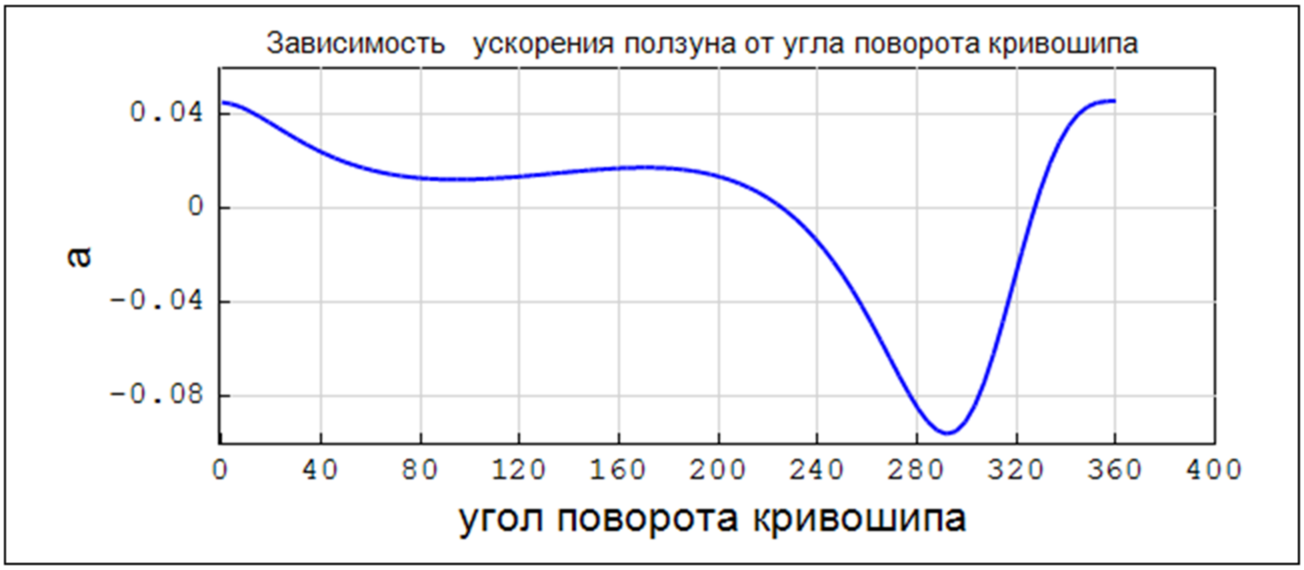
$$a_n := \frac{3 \cdot z_n - 4 \cdot z_{n-1} + z_{n-2}}{2 \cdot \Delta\theta}$$

$$VD := Dif(col(B, 9), \Delta t)$$

$$aD := Dif(VD, \Delta t)$$

$$\tau := 0 .. N$$





Пример3.Пространственный механизм-Шарнир Гука.Звенья соединены цилиндрическими(плоскими) шарнирами,оси которых пересекаются в центре сферы под углом 45 градусов

Размеры звеньев и координаты неподвижных точек

$C1 := \mathrm{eval}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $C2 := \mathrm{eval}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $C3 := 0$

$g1 := 1$ $g2 := 0$ $g3 := 0$

$L1 := 1$ $L2 := \sqrt{2}$ $L3 := 0$ $R := 0.96$

координаты точек(шарниров) в начальном положении

$X0_1 := 10^{-18}$ $X0_2 := -1$ $X0_3 := 0$

$X0_4 := 0$ $X0_5 := 0$ $X0_6 := 1$

Уравнения геометрических связей

$f_1 := (x_4)^2 + (x_5)^2 + (x_6)^2 - L1^2$ Уравнение сферы

$f_2 := (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - L1^2$ Уравнение сферы

$f_3 := (g1 - x_1)^2 + (g2 - x_2)^2 + (g3 - x_3)^2 - L2^2$ Длина звена gP1

$f_4 := (C1 - x_4)^2 + (C2 - x_5)^2 + (C3 - x_6)^2 - L2^2$ Длина звена CP2

$f_5 := (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 - L2^2$ Длина звена P1P2

Dragilev's Method

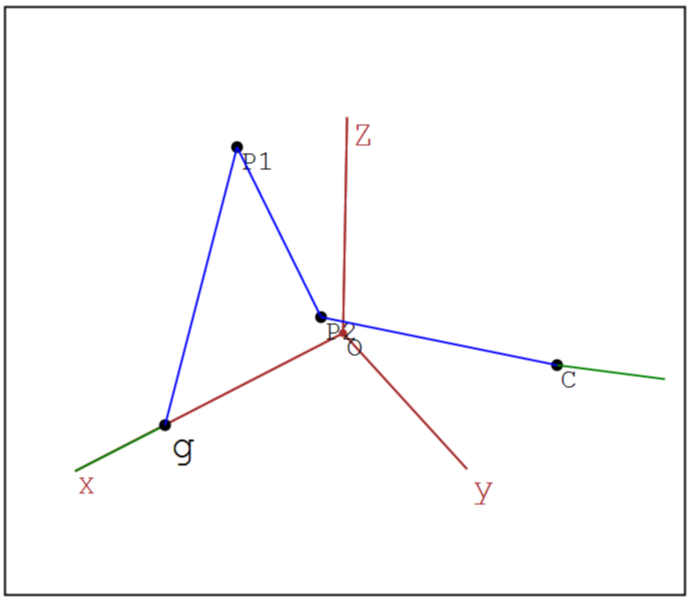
$tmin := 0 \qquad tmax := 6.3 \qquad \Delta t := 0.1 \qquad N := \frac{tmax}{\Delta t} \qquad N = 63$

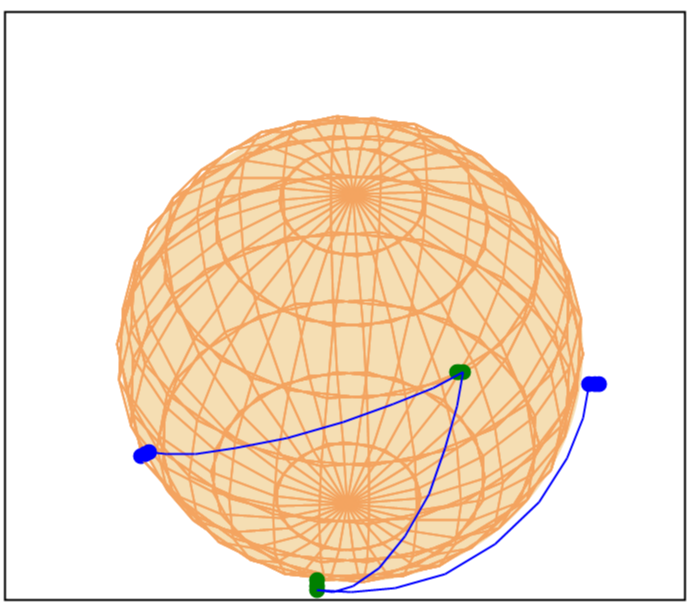
$B := Dragilev(X0, tmin, tmax, N)$

$B1 := eval(submatrix(B, 1, N, 2, 4))$

$B2 := eval(submatrix(B, 1, N, 5, 7))$

$\tau := 0..N-1$





Литература

1.Рычажные механизмы: форум //exponenta.ru: образовательный математический сайт. URL: http://forum.exponenta.ru/viewtopic.php?t=12842&start=0&postdays=0&postorder=asc&highlight=

2.R.Lopez.Classroom Tips and Techniques:Solving Algebraic Equations by the Dragilev Method, 2013, http://www.maplesoft.com/view.aspx?SF=149514/DragilevMethod.pdf

3. Иванов А.Б. Пахоменков Ю.М. О применении численного метода А. В. Драгилева при синтезе квазигармонических сигналов// Системы управления и обработки ин-формации: Научн.-техн. сб. / ФНПЦ «НПО «Аврора», СПб., 2007. Вып. 13 с.125-134.