

Análisis Numérico del Potencial Químico como Función de la Temperatura

Viacheslav Beloiarov

Noviembre 2022

Teoría

Nos interesa analizar el potencial químico para el caso de los Fermiones, que cumplen con la distribución:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}. \quad (1)$$

Sabemos que el potencial químico se obtiene a partir de:

$$N = \int_0^\infty f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2)$$

donde $f(\varepsilon)$ está dado por (1), y $D(\varepsilon)$ por:

$$D(\varepsilon) = A \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Sustituyendo (1) y (3) en (2), obtenemos:

$$N = A \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}. \quad (4)$$

La integral en (4) es complicada de resolver analíticamente, por lo que se proseguirá de la siguiente manera:

1. Supondremos que N está dado por:

$$N = A \int_0^{\mu_0} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = \frac{2}{3} A \mu_0^{\frac{3}{2}}. \quad (5)$$

2. Hacemos los siguientes cambios de variable:

$$x = \frac{\varepsilon}{\mu_0}, y = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Después de sustituir los cambios de variables mencionados en (4), e igualar (4) y (5) obtenemos:

$$\frac{2}{3} = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^{(x-y)/\tau} + 1}, \quad (6)$$

siendo $\tau = \frac{T}{T_0}$.

Análisis Numérico

Debido a las complicaciones analíticas de (6), se procede a realizar la integral numéricamente utilizando MATLAB. Es importante notar que la integral en (6) es una función de las dos variables τ y y , $I(\tau, y)$. Por lo tanto, cuando obtenemos la integral numéricamente, falta encontrar la dependencia de las dos variables, debido a que la función $I(\tau, y)$ es implícita. Para lograrlo, recurrimos a la función *fminsearch* de MATLAB. Con ayuda de ésta función, para cada valor de τ , vamos a obtener un valor de y que *minimiza* la función $I - \frac{2}{3}$, obteniendo así, dos vectores $\vec{\tau}$ y \vec{y} , los cuales podremos graficar para ver como depende $\mu(T)$ de T . El primer paso fue crear una función, llamada *objective_fun*. Ésta función es precisamente la que será minimizada por la función *fminsearch*. A continuación se muestra el código:

```

1 function f = objective_fun(lambda)
2
3 global TAU;
4
5 fun = @(x) sqrt(x) ./ (exp(x-lambda)/TAU + 1);
6 q = integral(fun, 0, Inf);
7
8 f = abs(q - 2/3);
9
10 end

```

Teniendo esta función, se creó la función *mu* dentro de la cual se realizó la minimización y la gráfica. A continuación se muestra el código:

```

1 function [] = mu(N)
2
3 global TAU;
4
5 tau = 0.01:0.01:N;
6 nt = size(tau);
7 nt = nt(2);
8
9 lambda = zeros(1,nt);
10
11 options = optimset('TolFun',1.e-10);
12
13 for k = 1:nt
14     TAU = tau(k);
15     x0 = 0;
16     x = fminsearch(@objective_fun,x0,options);
17     lambda(k) = x;
18 end
19
20 plot(tau, lambda);
21 hold on;
22 grid on;
23 xlabel('$\frac{T}{T_0}$','Interpreter','latex', 'FontSize', 18);
24 ylabel('$\frac{\mu}{\mu_0}$','Interpreter','latex', ...
25     'FontSize', 22);
26
27 title 'Potencial Químico como Función de la Temperatura'

```

Finalmente, se obtiene la siguiente gráfica:

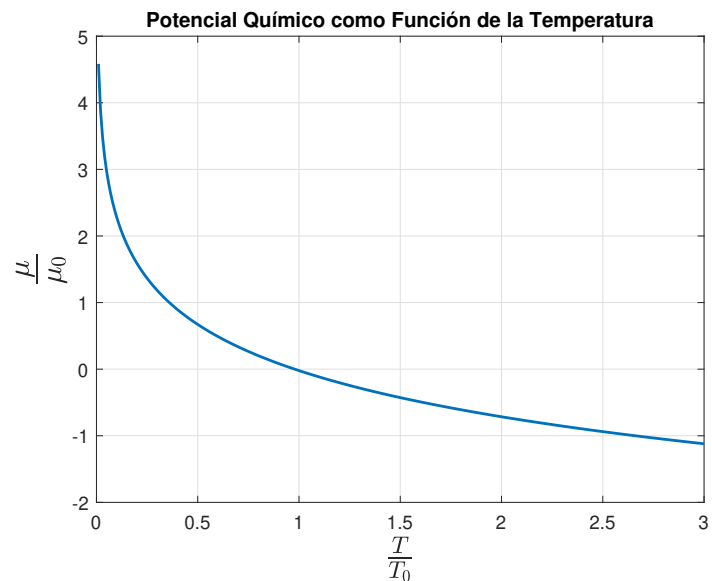


Figure 1: Potencial Químico como Función de la Temperatura